

3.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$$

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$$

ΣΧΟΛΙΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

1.

Διευκρίνιση

Η γραφή $\eta\mu\omega$ συμβολίζει έναν αριθμό και όχι γινόμενο $\eta\mu$ επί ω .

Το ίδιο για τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Π.χ: $\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\eta\mu}{\sigma\upsilon\nu}$ η απλοποίηση προφανώς είναι λάθος.

2.

Διευκρίνιση

Η γραφή $(\eta\mu\omega)^2$ σημαίνει $\eta\mu^2\omega$ και όχι $\eta\mu^2\omega^2$

3.

Το $\eta\mu$ σαν συνάρτηση του $\sigma\upsilon\nu$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega \Rightarrow \eta\mu\omega = \pm\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

4.

Το συν σαν συνάρτηση του ημ

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\omega}$$

5.

Η εφ σαν συνάρτηση της σφ

$$\epsilon\phi\omega, \sigma\phi\omega = 1 \Rightarrow \epsilon\phi\omega = \frac{1}{\sigma\phi\omega}$$

6.

Η σφ σαν συνάρτηση της εφ

$$\epsilon\phi\omega, \sigma\phi\omega = 1 \Rightarrow \sigma\phi\omega = \frac{1}{\epsilon\phi\omega}$$

7.

Τα ημ, συν σαν συνάρτηση της εφαπτομένης

$$\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1 + \epsilon\phi^2\omega}, \quad \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\phi^2\omega}$$

8.

Οι τρόποι απόδειξης μιας ισότητας

- i) Από το ένα μέλος στο άλλο. (Από εκείνο που έχει πράξεις ή αντικαταστάσεις)
- ii) Με ισοδυναμίες , γράφοντας τα δύο μέλη ταυτόχρονα , μέχρι να φθάσουμε σε ισότητα που ισχύει .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Όταν δίνεται το $\eta\mu\omega$, με ποιες ταυτότητες θα βρούμε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου ω ;

Απάντηση

Για το $\sigma\upsilon\nu\omega$: $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$

Για την $\epsilon\varphi\omega$: $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Για τη $\sigma\varphi\omega$: $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

Σχόλια 3, 4, 5

2.

Όταν δίνεται το $\sigma\upsilon\nu\omega$, με ποιες ταυτότητες θα βρούμε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου ω ;

Απάντηση

Για το $\eta\mu\omega$: $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$

Για την $\epsilon\varphi\omega$: $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Για τη $\sigma\varphi\omega$: $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

3.

Όταν δίνεται η $\epsilon\varphi\omega$, με ποιες ταυτότητες θα βρούμε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς του τόξου ω ;

Απάντηση

Για το $\eta\mu\omega$: $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$

Για το $\sigma\upsilon\nu\omega$: $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$ ή $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$

Για τη $\sigma\varphi\omega$: $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\epsilon\varphi\omega}$ ή $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

4.

Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi^2\omega + \sigma\varphi^2\omega + 2 = \frac{1}{\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega}$

Λύση

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi^2\omega + \sigma\varphi^2\omega + 2 &= \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega} + 2 \\ &= \frac{\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega + 2\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega \eta\mu^2\omega} \\ &= \frac{(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\omega \eta\mu^2\omega} = \frac{1}{\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega}\end{aligned}$$

5.

Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^3\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega = (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)(1 - \eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega)$

Λύση

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\begin{aligned}\eta\mu^3\omega + \sigma\upsilon\nu^3\omega &= (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)(\eta\mu^2\omega - \eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) \\ &= (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)(1 - \eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega)\end{aligned}$$

6.

Να αποδείξετε ότι $1 + \varepsilon\varphi^2 770^\circ = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 50^\circ}$

Λύση

$$\text{Είναι } \varepsilon\varphi 770^\circ = \varepsilon\varphi(2 \cdot 360^\circ + 50^\circ) = \varepsilon\varphi 50^\circ$$

$$1 + \varepsilon\varphi^2 770^\circ = 1 + \varepsilon\varphi^2 50^\circ = 1 + \frac{\eta\mu^2 50^\circ}{\sigma\upsilon\nu^2 50^\circ} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 50^\circ + \eta\mu^2 50^\circ}{\sigma\upsilon\nu^2 50^\circ} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 50^\circ}$$

7.

Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = 1 - 4\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega$

Λύση

$$(\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = 1 - 4\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^4\omega - 2\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 4\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$\eta\mu^4\omega + 2\eta\mu^2\omega \sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1$$

$$(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 = 1 \Leftrightarrow 1^2 = 1 \text{ που ισχύει}$$

8.

Να αποδείξετε ότι $(1 + \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2(1 + \eta\mu\omega)(1 + \sigma\upsilon\nu\omega)$

Λύση

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$$

$$(1 + \eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 2(1 + \eta\mu\omega)(1 + \sigma\upsilon\nu\omega) \quad \Leftrightarrow$$

$$1^2 + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega + 2\eta\mu\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + 2\sigma\upsilon\nu\omega =$$

$$= 2 + 2\sigma\upsilon\nu\omega + 2\eta\mu\omega + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$1 + 1 = 2 \quad \text{που ισχύει}$$

9.

Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\eta\mu^4\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu^4\omega + 4\eta\mu^2\omega} = 3$

Λύση

$$\begin{aligned} \sqrt{\eta\mu^4\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega} &= \sqrt{(1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2 + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega} \\ &= \sqrt{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega} \\ &= \sqrt{1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega} \\ &= \sqrt{(1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega)^2} = |1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega| = 1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega \end{aligned}$$

$$\text{Ομοίως} \quad \sqrt{\sigma\upsilon\nu^4\omega + 4\eta\mu^2\omega} = 1 + \eta\mu^2\omega$$

$$\text{Άρα} \quad \sqrt{\eta\mu^4\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu^4\omega + 4\eta\mu^2\omega} = 1 + \sigma\upsilon\nu^2\omega + 1 + \eta\mu^2\omega = 2 + 1 = 3$$

10.

Να αποδείξετε ότι $\frac{1+\varepsilon\varphi^v\omega}{1+\sigma\varphi^v\omega} = \left(\frac{1+\varepsilon\varphi\omega}{1+\sigma\varphi\omega}\right)^v$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

Λύση

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^v\omega}{1+\sigma\varphi^v\omega} = \left(\frac{1+\varepsilon\varphi\omega}{1+\sigma\varphi\omega}\right)^v \Leftrightarrow \frac{1+\varepsilon\varphi^v\omega}{1+\frac{1}{\varepsilon\varphi^v\omega}} = \left(\frac{1+\varepsilon\varphi\omega}{1+\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}}\right)^v$$

$$\frac{1+\varepsilon\varphi^v\omega}{\frac{\varepsilon\varphi^v\omega+1}{\varepsilon\varphi^v\omega}} = \left(\frac{1+\varepsilon\varphi\omega}{\frac{\varepsilon\varphi\omega+1}{\varepsilon\varphi\omega}}\right)^v$$

$$\varepsilon\varphi^v\omega = (\varepsilon\varphi\omega)^v \quad \text{που ισχύει}$$

11.

Να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega \sigma\phi\omega - \eta\mu\omega \epsilon\phi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = 1 + \epsilon\phi\omega + \sigma\phi\omega$

Λύση

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega \sigma\phi\omega - \eta\mu\omega \epsilon\phi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = 1 + \epsilon\phi\omega + \sigma\phi\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\omega \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = 1 + \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega} - \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}$$

$$\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^3\omega - \eta\mu^3\omega}{\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^3\omega - \eta\mu^3\omega}{\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega (\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}$$

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega)(\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + \eta\mu^2\omega)}{\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega (\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + \eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + \eta\mu^2\omega}{\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}$$

$$\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega}{\eta\mu\omega \sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega + 1}{\sigma\upsilon\nu\omega \eta\mu\omega} \quad \text{που ισχύει}$$